Analysis 1 - Exam Notes

Ruben Schenk

August 2020

1 Folgen und Reihen

1.1 Konvergenz mit ϵ-Def.

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. (a_n) konvergiert gegen $a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon\ \forall n \geq N_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$.

Folgende zwei Behauptungen sind hilfreich bei ϵ-Konvergenzbeweisen:
Behauptung 1.1 Wir dürfen o.B.d.A annehmen, dass ϵ von oben durch eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ beschränkt ist.
Behauptung 1.2 Wir müssen beim Abschätzen nicht ein "isoliertes" ϵ auf der rechten Seite erhalten, es reicht auch wenn das ϵ mit einer positiven Konstanten multipliziert wird.

Da wir uns für die Konvergenz nur sehr kleiner ϵ-Werte interessieren, nehmen wir o.B.d.A an, dass $\epsilon < 1$ ist. Falls wir dann eine Abschätzung der Form $|a_n - 1| < ... < C \cdot \epsilon$ $(C > 0)$ erhalten, dann erklären wir den Beweis für beendet (*Da wir ϵ beliebig klein wählen können, wird auch $C \cdot \epsilon$ beliebig klein.*).

1.2 Konvergenz von Folgen

Bemerkung: konvergent $\Rightarrow$ beschränkt, aber nicht umgekehrt!
Bemerkung: (a_n) konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) beschränkt und $\lim inf\ a_n = \lim sup\ a_n$

Einschliessungskriterium
Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall n \geq k$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$.

Weierstrass
- Sei a_n monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim a_n = sup\{a_n\}$
- Sei a_n monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow \lim a_n = inf\{a_n\}$

Cauchy-Kriterium
Eine Folge (a_n) heisst **Cauchy-Folge** falls $\forall\epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sodass $m, n \geq N_\epsilon$ impliziert, dass $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Bemerkung: Für eine Cauchy-Folge (a_n) gilt:
- (a_n) cauchy $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt
- (a_n) cauchy $\Leftrightarrow (a_n)$ konvergent

1.2.1 Strategie - Konvergenz von Folgen

1. (Bei Brüchen) Grösste Potenz von n ausklammern und kürzen. Alle übrigen Brüche der Form $\frac{a}{n^s}$ streichen, da diese zu 0 gehen wenn $n \to \infty$.
2. (Bei Wurzeln in einer Summe im Nenner) Multiplizieren des Nenners und Zählers mit der Differenz der Summe im Nenner (Nenner: $(a + b)$, wir multiplizieren mit $(a - b)$ und Umgekehrt).
3. Anwendung des Sandwich-Theorems (*Einschliessungskriterium*).
4. Vergleich mit Referenz-Folge.
5. Grenzwert durch simple Operationen und Umformen ermitteln.
6. Limit zeigen per Definition der Konvergenz.
7. (Bei rekursiven Folgen) Anwendung des Satzes von Weierstrass zur monotonen Konvergenz und Induktionstrick.
8. Anwendung der Cauchy-Kriteriums.
9. Suchen eines konvergenten Majorant.

1.2.2 Strategie - Divergenz von Folgen

1. Suchen eines divergenten Minorant.
2. (Bei alternierenden Folgen) Zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_{p1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{p2(n)}$, z.B. bei einer Folge der Form $(-1)^n \cdot f(x)$ die geraden und ungeraden n als Teilfolgen.

1.3 Konvergenz von induktiven Folgen

Eine Folge wird **induktiv definiert** und hat z.B. die Form: $a_1 := C$ $(C \in \mathbb{R})$, $a_{n+1} := f(a_n)$ $(\forall n > 1)$. Die **Konvergenz einer induktiven Folge** lässt sich wie folgt zeigen:

1. Zeige, dass die Folge monoton wachsend/fallend ist. (Trend feststellen durch Ausrechnen erster Glieder, danach per Induktion die *Monotonie* zeigen.)
2. Zeigen, dass die Folge beschränkt ist. (Abschätzen der *unteren/oberen Schranke*, danach beweisen per Induktion.)
3. Per Satz der "Monotonen Konvergenz" folgt aus 1 und 2, dass der Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ existieren muss.
4. Verwende Satz 3.3.2 und Induktion-Trick. ($\lim d_n = d = \lim d_{n+1}$, i.e. $d = \lim d_{n+1} = ... = f(d)$ und dann Auflösen nach d)

1.4 Konvergenz von Reihen

Cauchy-Kriterium Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ mit $\left|\sum_{k=m}^{m} a_k\right| < \epsilon$, $\forall m \geq n > N$.

Nullfolgenkriterium
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Es gilt: $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{\frac{1}{n}}$ divergiert, da $|a_n| = n^{\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} = 1 \neq 0$.

Majorantenkriterium
Seien (a_n) und (b_n) Folgen, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq b_n$ $(\forall n \geq n_0)$, dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}$ konvergiert absolut.

Minorantenkriterium
Seien (a_n) und (b_n) Folgen, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq b_n \leq a_n$ $(\forall n \geq n_0)$. Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}$ divergiert.

Als Majorant oder Minorant eignet sich oft eine Reihe folgender Kategorien:

- **Geometrische Reihe:** $\sum_{n=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$ bzw. divergiert für $|q| \geq 1$
- **Zeta Funktion:** $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$ bzw. divergiert für $s \leq 1$

Des weiteren gilt folgendes:

- Sei $(S_n) = \sum_{k=0}^{n} q^k$ mit $|q < 1|$, dann ist (S_n) konvergent und $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$
- $(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ konvergiert

Leibnitzkriterium
Sei $a_n > 0$ $\forall n \geq 1$, monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann gilt, dass $\sum(-1)^{k+1} a_k$ konvergiert.

Integral-Kriterium
Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergent.

Satz: Seien $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\sum(a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$ ist auch konvergent
- $\sum(\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum a_k$ ist auch konvergent

Quotienten-/Wurzelkriterium
Sei (a_n) eine Folge, $n_0 \in \mathbb{N}$. Sei:
- $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Falls gilt:
- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}$ konvergiert absolut.
- $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.
- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}$ divergiert.

Absolute Konvergenz
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_k| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_k < \infty$. Des Weitern gilt: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch die ungeordnete Reihe von a_k absolut.

1.4.1 Referenz-Reihen

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$	–

1.4.2 Strategie - Konvergenz von Reihen

1. Ist $\sum a_n$ ein spezieller Typ (Teleskopieren, Geometrische- oder Harmonische Reihe, Zetafunktion, usw.)?
2. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Wenn nein, dann divergiert die Reihe (*Nullfolgenkriterium*).
3. Ist das Quotientenkriterium anwendbar? Wenn nicht, das Wurzelkriterium?
4. Existiert ein konvergenter Majorant? Wenn nicht, ein divergenter Minorant?
5. Kann man Leibnitzkriterium anwenden?

1.5 Beispiele

1.5.1 Teleskopsummen

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\frac{n}{n+1})$?

- $S_k = \sum_{n=1}^{k} \log(\frac{n}{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} \Big(\log(n) - \log(n+1)\Big) = \Big(\log(1) - \log(2)\Big) + \Big(\log(2) - \log(3)\Big) + \Big(\log(3) - \log(4)\Big) + ... = \log(1) - \log(k+1) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_k = -\lim_{k\to\infty} \log(k+1) = -\infty$

1.5.2 Funktionenfolgen

Konvergiert $f_n(x) = \cos(\pi x^n)$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$?

- Konvergiert Punktweise aber nicht gleichmässig, denn: $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi x^n) = \cos(\pi \lim_{n\to\infty} x^n) = 1$, für $0 \le x < 1$, -1 für $x = 1$. Die Grenzfunktion ist unstetig, also ist die Konvergenz nicht gleichmässig.

1.5.3 Reihen

Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{t}{k^2}\Big)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert.

1. Zunächst nehmen wir $N \in \mathbb{N}$ so gross, dass $\frac{|t|}{N^2} < 1$. Dann gilt: $\prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{t}{k^2}\Big) = \prod_{k=1}^{N} \Big(1 + \frac{t}{k^2}\Big) \cdot \prod_{k=N+1}^{n} \Big(1 + \frac{t}{k^2}\Big)$.
2. Es reicht nun, wenn $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N+1}^{n} \Big(1 + \frac{t}{k^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-N} \Big(1 + \frac{t}{(k+N)^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{t}{(k+N)^2}\Big)$ existiert.
3. Sei $a_n = \prod_{k=N+1}^{n} \Big(1 + \frac{t}{(k+N)^2}\Big)$. Falls $t \ge 0$ ist die Folge (a_n) steigend, ansonsten ist sie fallend. Insbesondere ist sie monoton und somit hat sie einen Grenzwert, falls die Folge beschränkt ist: $0 \le a_n \le \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{t}{(k+N)^2}}$ (da $1 + x \le e^x$ ist) $= e^{t(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})} \le e^{|t|(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})} < \infty$.
4. Es gilt also, dass (a_n) beschränkt ist und daher existiert $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{t}{k^2}\Big)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. Zeige, dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin() a_k$ konvergiert.

1. Aussage: $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, muss auch $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent sein, wobei $c_1 = 0$ und $c_k = b_{k-1}$ für $k \ge 2$. Zudem gilt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k$. Daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} c_k\Big) = 0$.
2. Es gilt: $|\sin(x)| \le |x|$. Daraus folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |\sin(a_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, muss nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} |\sin(a_k)|$ absolut konvergent sein.
3. Da $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$ ist, gilt $(b_k)_{k\ge1} \le C \in \mathbb{R}$. Daraus folgt: $|b_n \sin(a_n)| \le C|a_n| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |b_k \sin(a_k)| \le C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
4. Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ absolut konvergent ist, ist auch $C\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ absolut konvergent und daraus schliessen wir durch das Majorantenkriterium, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k \sin(a_k)|$ absolut konvergent ist und daher $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(a_k)$ konvergent sein muss.

1.5.4 Grenzwerte

Zeige mittels der Definition des Grenzwertes, dass $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+\cos(n)} - \sqrt{2n+1}) = 0$ ist.

1. Limit umschreiben, i.e. multiplizieren mit dem conjugé: $|\sqrt{2n+\cos(n)} - \sqrt{2n+1}| = \frac{|\cos(n)-1|}{|\sqrt{2n+\cos(n)}+\sqrt{2n+1}|} \le \frac{2}{\sqrt{2n+1}}$.
2. Passendes ϵ konstruieren: Für $\epsilon > 0$ gegeben wählen wir $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ so gross, dass $\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{1}{2} < N$.
3. Für $\forall n \ge N$ gilt nun: $\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{1}{2} < n \Rightarrow \frac{4}{\epsilon^2} < 2n+1 \Rightarrow \frac{4}{2n+1} < \epsilon^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2n+1}} < \epsilon$.
4. Daraus folgt, dass $|\sqrt{2n+\cos(n)} - \sqrt{2n+1}| \le \frac{2}{\sqrt{2n+1}} < \epsilon$, und da ϵ beliebig ist, gilt $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+\cos(n)} - \sqrt{2n+1}) = 0$.

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$? Wenn ja, bestimme den Grenzwert der Reihe. Wir beginnen mit der Partielbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1+k-k}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(2+2k-2k)}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)
\end{aligned}$$

Danach berechnen wir die Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2n+1}\Big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2 Stetigkeit

2.1 Verschiedene Definitionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f : D \to \mathbb{R}^d$, $x \to f(x)$ eine Funktion.

Definition: f heisst **stetig in** $x_0 \in D$ falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Falls f für alle $x_0 \in D$ stetig ist, dann ist f **stetig auf** D.

Definition: (ϵ-Definitionen)
Punktweise stetig: $\forall x_0$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x$: $||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$.
Gleichmässig stetig: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0, \forall x$, x_0 : $||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$

Bemerkung: In der punktweisen Stetigkeit ist das δ von x_0 und ϵ abhängig ($\delta(\epsilon, x_0)$), während in der gleichmässigen Stetigkeit das δ nur von ϵ abhängen darf ($\delta(\epsilon)$).

Korollar: Falls f und g stetig in x_0 und auf gleichem Definitions- und Bildbereich, dann sind auch $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Korollar: Polynomiale Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

2.2 Min-Max Satz

Idee: Eine stetige Funktion ist auf einem kompakten Intervall beschränkt und nimmt ein Maximum und ein Minimum an. Ein kompakter Intervall ist gleich $[a,b]$.

Lemma: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ auch stetig in x_0.

Satz: Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u, v \in I$ mit: $f(u) \le f(x) \le f(v)$, $\forall x \in I$.
Insbesondere ist f **beschränkt**.

2.3 Zwischenwertsatz

Korollar: Ein Polynom mit ungeradem Grad besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Satz: Zwischenwertsatz
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \le f(b)$. Dann gilt: $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists x \in [a,b] : f(x) = y$.

Bemerkung: Der Zwischenwertsatz (ZWS) wir oft bei Beweisen verwendet, wo man zeigen will, ob eine Funktion einen gewissen Wert annimmt (ohne diesen explizit zu berechnen).

2.4 Satz über die Umkehrabbildung

Satz: Sei $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Sei f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig, dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist $f^{-1} : J \to I$ stetig und streng monoton wobei $J = f(I) \subset \mathbb{R}$.

2.5 Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und seien $f_k, f : D \to \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$.

Definition: f_k konvergiert gleichmässig in D gegen f falls gilt: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \ge 1$ sodass: $\forall n \ge N$, $\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Satz: Wenn eine Funktionenfolge aus stetigen Funktionen besteht und gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert, dann ist f stetig.
Korollar: Falls f_k eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dass ist die Funktion $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ stetig.

Definition: $\sum_{k=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmässig, falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Definition
(i) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise** gegen f, falls gilt: $\forall x \in D$: $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.
(ii) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmässig** gegen f, falls gilt: $sup_{x\in D}|f_k(x) - f(x)| \to_{k\to\infty} 0$.

Satz: Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen. Sei zudem $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall x \in D$ wobei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann gilt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_(x)$ konvergiert gleichmässig und der Grenzwert $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist eine stetige Funktion.

2.5.1 Strategie - Konvergenz von Funtkionenfolgen

1. Punktweiser Limes von f_n auf Definitionsbereich Ω finden:
Für ein fixes aber beliebiges x (n ist die Variable): $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
2. Prüfe auf gleichmässige Konvergenz
A) Indirekte Methode:

- f unstetig $\Rightarrow$ keine gleichmässige Konvergenz
- f stetig, monoton wachsend ($f_n(x) \leq f_{n+1}$, $\forall x \in \Omega$) und Ω kompakt $\Rightarrow$ gleichmässige Konvergenz

B) Direkte Methode:

1. Berechne $\sup_{x\in\Omega}|f_n(x) - f(x)|$ (entweder man sieht Maximum direkt oder man rechnet die Ableitung von $|f_n(x)-f(x)|$ und setzt sie gleich 0).
2. Limes für $n \to \infty$ von $\sup_{x\in\Omega}|f_n(x) - f(x)|$ berechnen. Wenn Limes $= 0 \Rightarrow f_n$ auf Ω gleichmässig konvergent.

2.6 Grenzwerte berechnen

Definition: $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall s > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$.

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = A$) falls $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sodass $\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$.

Satz: Variablenwechsel
Seien f und g Funktionen, wobei f stetig in y_0 und g stetig in x_0 ist und gilt, dass $y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Dann gilt: $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$.

Satz: Exponentenregel
Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ und $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ (beide Grenzwerte existieren). Dann gilt: $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)}$.

Satz: f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ Für jede Folge (a_n) gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Log-Trick: Limes der Form ∞^0 und 1^∞ können meist mit dem Log-Trick berechnet werden: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$, dann Bernoulli anwenden oder vereinfachen.

Les 7 cas d'indétermination
$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Satz: Bernoulli-de l'Hospital
Seien $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$ (ausser vielleicht in $c \in I$). Wenn $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in I\setminus\{c\}$ und $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, dann gilt: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Zeigen, dass Grenzwert nicht existiert:
Es gilt: $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow$ für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, folgt $\lim_{n\to a} f(a_n) = A$. Dadurch können wir die Existenz eines Grenzwertes wiederlegen, wenn fir zwei verschiedene Folgen finden für die gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, aber $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

Limit von Kompositionen: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ und $\lim_{x\to b} g(x) = c \Rightarrow \lim_{x\to a f(g(x))} = c$.

2.7 Grenzwerte mit Potenzreihen

Potenzreihen: Potenzreihen sind Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$. Eine Potenzreihe mit einem Entwicklungspunkt x_0 definieren wir wie folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Stetigkeit von Potenzreihen und Limes: Potenzreihen sind stetig auf $]-r, r[$. $\forall x \in]-r, r[$: $\lim_{x\to x_0} p(x) = p(\lim(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$.

Konvergenzradius: Der Konvergenzradius einer Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0 ist die grösste Zahl r, für welche die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert (auch $|x - x_0| = r$ prüfen!). Falls die Reihe für alle x konvergiert, so ist der Konvergenzradius unendlich. Ansonsten definieren wir:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Potenzreihendarstellung einiger Funktionen:

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $r = \infty$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $r = \infty$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $r = \infty$
- $\ln(x + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, $r = 1$

2.8 Surjektivität

Zeigen, dass eine Funktion injektiv ist:
f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton $\Leftrightarrow$ $f' > 0$ oder $f' < 0$.

Zeigen, dass eine Funktion surjektiv ist:
Mit Zwischenwertsatz: Sei Bildbereich $=]a, b[$

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ und $\lim_{x\to-\infty} = a$ zeigen
2. Sei nun $y \in]a, b[$ beliebig. Wegen der Grenzwerte von f gilt: $\exists x_1 < x_2 : f(x_1) < y < f(x_2)$. Mit dem Zwischenwertsatz gilt dann: $\exists c \in [x_1, x_2] : f(c) = y$ und somit ist f surjektiv.

3 Differentialrechnung

3.1 Differentialquotient

Definition: Der **Differentialquotient** einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ ist definiert durch: $f'(x_0) := \frac{d}{dx} f(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. f heisst **differenzierbar in** x_0 falls der obige Grenzwert existiert und **differenzierbar**, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkung: Die Tangente zu x_0 ist definiert durch: $g(x) := f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Satz: Differenzierbarkeit
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt: f ist in x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit:

1. $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
2. $r(x_0) = 0$ und r stetig in x_0

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Satz: f ist in x_0 differenzierbar genau dann wenn $\tau : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 ist und $f(x) = f(x_0) + \tau(x)(x - x_0)$, $\forall x \in D$. In diesem Fall gilt $\tau(x_0) = f'(x_0)$.

Regel von L'Hospital
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $c \in]a, b[$ mit $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

Höhere Ableitungen
1. Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist.
2. f ist n-mal stetig differenzierbar in D, falls sie n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ stetig in D ist.
3. f ist **glatt** in D, falls $\forall n \geq 1$, f n-mal in D differenzierbar ist.

Eine n-mal differenzierbare Funktion ist $(n - 1)$-mal stetig differenzierbar.

Bemerkung:
$\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\ln(x)$, $\arcsin(x)$. $\arccos(x)$, $arccot(x)$, $\arctan(x)$ und Polynome sind glatte Funktionen. $\tan(x)$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $\cot(x)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ glatt.

Zeigen, dass eine Funktion in x_0 nicht differenzierbar ist:

- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$
- f nicht stetig in $x_0 \Rightarrow f$ nicht differenzierbar in x_0
- $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Beispiel: Zeige, dass $\sqrt{x}$ nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar ist:
$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$, daher nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

3.2 Ableitungsregeln

Definition: Linearität
Es gilt: $(\alpha \cdot f(x) + g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + g'(x)$.

Definition: Produktregel
Es gilt: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Definition: Quotientenregel
Es gilt: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$.

Definition: Exponentenregel
Es gilt: $(c \cdot x^a)' = c \cdot a \cdot x^{a-1}$.

Definition: Kettenregel
Es gilt: $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$.

Rule de L'Hospital
Führ Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung:

- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$
- $(g \circ f)'' = (g'' \circ f) \cdot (f')^2 + (g' \circ f) \cdot f''$
- $(g \circ f)''' = (g''' \circ f) \cdot (f')^3 + 3(g'' \circ f) \cdot f' \cdot f'' + (g' \circ f) \cdot f'''$

Trick:

- k gerade: $(\cosh(x))^{(k)} = \cosh(x)$ und $(\sinh(x))^{(k)} = \sinh(x)$
- k ungerade: $(\cosh(x))^{(k)} = \sinh(x)$ und $(\sinh(x))^{(k)} = \cosh(x)$

3.3 Mittelwertsatz und Umkehrsatz

Satz: Mittelwertsatz
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a,b[$. Dann existiert ein $x_0 \in]a,b[$ mit $f(b) = f(a) + f'(x_0)\cdot(b-a) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Satz: Umkehrsatz
Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$ und seien $-\infty \le c = inf_{x\in]a,b[} f(x) < sup_{x\in]a,b[} f(x) = d \le +\infty$. Dann ist $f :]a,b[\to]c,d[$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} :]c,d[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$, $\forall x \in]a,b[$, bzw. $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, $\forall y \in]c,d[$.

3.4 Taylorreihne

Jede glatte, d.h. beliebig oft differenzierbare, Funktion $f \in \mathbb{C}^\infty$ kann als Potenzreihe angenähert werden.

Definition: Taylor-Polynom
Sei $f : I \to \mathbb{R} \in \mathbb{C}^\infty$, dann definieren wir das **N-te Taylor-Polynom** $Tf(x;a)$ an einer beliebigen Entwicklungsstelle $a \in I$ wie folgt:
$T_N f(x : a) := \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + ...$

Definition: Taylorreihe
Sei $f \in \mathbb{C}^\infty$, dann kann f auch anders dargestellt werden:
$Tf(x;a) := T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$
Die unendliche Reihe wird **Taylorreihe** von f an Stelle a genannt.

Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $p > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_l(x-x_0)^k$ auf $]x_0 - p, x_0 + p[$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1}$ für alle $x \in]x_0 - p, x_0 + p[$.

Wichtige Taylorreihen (für $a = 0$):

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x$

Definition: Fehlerabschätzung
Sei $f \in \mathbb{C}^\infty$ und sei $T_N f(x;a)$ das N-te Taylor-Polynom von f. Dann gilt die folgende Gleichung für ein $x \ge a$: $f(x) = T_N(x) + R_N f(x;a)$
Dabei ist $R_N f(x;a)$ der **Fehler**. Dieser Fehler kann nun wie folgt abgeschätzt werden:
$|R_N f(x;a)| \le \sup_{a<\xi<x} |f^{(N+1)}(\xi)| \cdot \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!}$
Der Fehler R_N wird umso grösser, je grösser die Differenz zwischen x und a ist.

3.4.1 Beispiele: Taylor Approximation

1. Sei $f(x) = x^x$, $N = 3$, und $x_0 = 1$. Suche die Approximation für $(\frac{7}{5})^{\frac{7}{5}}$.

1. $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ berechnen.
2. $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$
3. $f(\frac{7}{5}) = 1 + \left(\frac{7}{5} - 1\right) + \frac{2}{2}(\frac{7}{5}-1)^2 + \frac{3}{6}(\frac{7}{5}-1)^3 = \frac{199}{125} = 1.592$

4 Integralrechnung

4.1 Das Riemann-Integral

Derfinition: Partitionierung
Wir teilen das Intervall $I = [a,b]$ in n Teilintervalle auf. Das gibt uns eine Menge von Grenzpunkten $x_0 ... x_n$. Es gilt also:
$P := \{x_0 = a,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1},\ x_n = b\}$
Ein Teilintervall I_i ist gegeben durch $I_i = [x_{i-1},\ x_i]$

Definition: Stützstelle
Aus jedem Teilintervall I_i wählen wir einen Punkt ξ_i. Das gibt uns die Menge der Stützstellen $\xi_1 ... \xi_n$.
$\xi = \{\xi_1 ... \xi_n\}$, wobei $\xi_i \in I_i = [x_{i-1},\ x_i]$

Definition: Die Riemann-Summe
Gegeben sei eine stetige Funktion $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, sowie eine Partitionierung P in n Teile und Stützstellen ξ. Dann ist die **Riemannsche Summe** definiert durch:
$S(f,P,\xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Definition: Unter- und Obersumme
Gegeben sei eine Partitionierung P. Dann definieren wir:

- Untersumme: $\underline{S}(f,P) := \inf_{x\in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$
- Obersumme: $\bar{S}(f,P) := \sup_{x\in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Definition: Riemann-Integrierbarkeit
Eine Funktion $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst **Riemann-Integrierbar**, wenn gilt:
$\sup_{P_1} \underline{S}(f,P_1) = \inf_{P_2} \bar{S}(f,P_2) =: A$
Also wenn sich die Unter- und Obersumme annähern, je feiner die Partitionierung wird. In diesem Fall wird A als das Riemann-Integral von f bezeichnet. Man schreibt dann
$A := \int_a^b f(x)dx$.
Eine äquivalente Definition: f ist genau dann integrierbar wenn gilt:
$\forall \epsilon > 0,\ \exists P : |\underline{S}(f,P) - \bar{S}(f,P)| < \epsilon$.

Behauptung: Es gibt zwei wichtige Kriterien zur Integrierbarkeit:

- f stetig im kompakten Intervall $[a,b] \Rightarrow f$ integrierbar über $[a,b]$
- f monoton im kompakten Intervall $[a,b] \Rightarrow f$ integrierbar über $[a,b]$

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sein $P_{(n)}$ eine Folge von Partitionierungen in n Teilintervalle, deren Feinheit gegen 0 geht für $n \to \infty$. Dann gilt:
$\lim_{n\to\infty} S(f,P_{(n)}) = \int_a^b f(x)dx$

Ungleichungen:

- $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$
- $\left|\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$

Mittelwertsatz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Satz: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig und g beschränkt und integrierbar mit $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$

Korollar: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a + c$, $b + c$ in I enthalten ist: $\int_{a+c}^{b+d} f(x)dx = \int_a^b f(t + c)dt$
2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a \cdot c$, $b \cdot c$ in I enthalten ist: $\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)dx$

4.1.1 Integration konvergenter Reihen

Satz: Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Korollar: Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter, integrierbarer Funktionen, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx$

Korollar: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $p > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < p$, f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-p, p[$: $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$

4.2 Stammfunktionen

Definition: Stammfunktion
F heisst Stammfunktion von f, wenn gilt:
$F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a, b]$

Bemerkung: Wenn f integrierbar ist, heisst das nicht zwingend, dass auch eine Stammfunktion existieren muss.
Beispiel: $f(x) = 0$, *falls* $x \leq 0$, 1, *falls* $x > 0$.

Definition: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Sei $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F(x)$ ihre Stammfunktion. Dann gilt:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Eine äquivalente Darstellung wäre:
$F(x) := \int_a^x f(t)dt$

Das Integral erfüllt paar wichtige Eigenschaften:

- **Linearität:** $\int_a^b u \cdot f(x) + v \cdot g(x)dx = u \cdot \int_a^b f(x)dx + v \cdot \int_a^b g(x)dx$
- **Monotonie:** Sei $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- **Gebietsadditivität:** Sei $c \in [a, b]$. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4.3 Berechnung der Integrale

Polynome
Für Polynome gilt: $\int c \cdot x^n dx = \frac{c \cdot x^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq 0)$

4.3.1 Strategie - Integrale Berechnen

Bruchform:

1. Versuchen zu vereinfachen, sodass man einen einfachen Ausdruck im Denominator von leicht integrierbaren Teilfunktionen erhält.
2. Partialbruchzerlegung anwenden um so eine Summe von leicht integrierbaren Brüchen zu erhalten.
3. $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ oder $\frac{u'}{u}$ erkennen ($\sqrt{u}+C$, $\log|u|+C$).

Produktform:

1. Wenn man ähnliche constitutions in beiden Termen hat, dolper le produit sodass man eine Summe von leicht integrierbaren Teilfunktionen erhält.
2. Partielle Integration anwenden. (Manchmal öfters hintereinander anwenden, ev. erhält man Gleichung der Form $\mathbb{I} = ... - \mathbb{I}$).
3. Kettenregel anwenden wenn die Form sich erkennen lässt.

Komplizierter Ausdruck mit Potenz:

1. $\int_a^b (f(x))^c dx$ auflösen in $\int_a^b (f(x))^{c-1} \cdot f(x)dx$ um partielle Integration anzuwenden.
2. $\int_a^b (f(x))^c \cdot 1$ Trick anwenden um partielle Integration zu benutzen.

Exponentform:

1. e / $\log$ Trick anwenden wenn Variable x in Exponent ist.
2. z.B. $3^x = e^{\log(3) \cdot x}$

Produkte mit e, $\sin$, $\cos$, ...**:**

1. Mehrmals partielle Integration anwenden, wobei $\sin$, $\cos$ immer g' und e immer f ist $\Rightarrow$ man kommt auf ursprünglichen Ausdruck zurück und erhält Gleichung mit $\mathbb{I}$.

Summe im Integral:

1. Summe aus dem Integral herausziehen. **Wichtig:** Die Reihe muss dazu **gleichmässig konvergieren**!
2. **Beispiel:** $\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

4.3.2 Partielle Integration

Definition: Partielle Integration
$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$

Bemerkung:

- Grundsätzlich leiten wir Polynome ab $(g(x))$ und sich wiederholende Funktionen $(\sin, \cos, e^x$ etc.) integrieren wir $(f'(x))$.
- Manchmal müssen wir künstlich mit 1 multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (Bsp. $\int \log(x)dx$)
- Wenn wir durch mehrfache partielle Integration wieder beim ursprünglichen Integral landen, können wir die erhaltene Gleichung nach diesem Integral auflösen.

Beispiel: $\int_0^1 x \cdot e^x dx$ mit partieller Integration:
$\int_0^1 x_{\downarrow} \cdot e^x_{\uparrow} dx = x \cdot e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$
$= x \cdot e^x|_0^1 - e^x|_0^1$
$= e - (e - 1) = 1$

Beispiel: Berechne $\int \log(x)dx$:
$\int \log(x) = 1_{\uparrow} \cdot \log_{\downarrow}(x)dx = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x$

Beispiel: Berechne $\mathbb{I} = \int e^x \sin(x)dx$:
$\int e^x_{\downarrow} \sin_{\uparrow}(x)dx = -\cos(x)e^x - \int -\cos(x)e^x dx = -\cos(x)e^x + \int \cos_{\uparrow}(x) \cdot e^x_{\downarrow} dx = -\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \sin(x) \cdot e^x dx$. Nun setzten wir $\mathbb{I}$ für $\int e^x \sin(x)dx$ ein und erhalten folgende Gleichung:
$\mathbb{I} = -\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \mathbb{I}$
$\Rightarrow 2\mathbb{I} = -\cos(x)e^x + \sin(x)e^x$
$\Rightarrow \mathbb{I} = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))$
Daraus folgt, dass $\int e^x \sin(x)dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))$

4.3.3 Substitution

Definition: Substitution
Wir wollen $\int_a^b f(g(x))dx$ berechnen. Ersetzten wir $g(x)$ durch u, dann erhalten wir das äquivalente Integral $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{du}{g'(x)}$.

Bemerkung:

- Die neu entstandene Funktion $g'(x)$ muss sich irgendwie herauskürzen.
- Die Grenzen müssen ebenfalls substituiert werden durch $g(a)$ und $g(b)$.
- Alternativ zum substituieren der Grenzen kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und zum Schluss die Variable u wieder durch x rücksubstituieren.

Beispiel: Berechne $\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx$ durch Substitution:
Wir substituieren $u = x^2$. Es gilt $\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$. Wir erhalten also:
$\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx = \int_0^4 x \cdot e^u \frac{du}{2x}$
$= \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du$
$= \frac{1}{2} e^u|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$

Beispiel: Berechne $\int \cos(\sqrt{x})dx$:
Wir substituieren $u = \sqrt{x}$. Es gilt $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2u} dx \Rightarrow dx = 2u\ du$. Wir erhalten also:
$\int \cos(\sqrt{x})dx = \int \cos(u)du = 2 \int \cos_{\uparrow}(x) \cdot u_{\downarrow} du = 2 \cdot (\sin(u) \cdot u - \int \sin(u) \cdot 1\ du) = 2 \cdot (\sin(u) \cdot u + \cos(u))$.
Durch Rücksubstitution erhalten wir nun folgende Lösung: $\int \cos(\sqrt{x})dx = 2 \cdot (\sin(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x} + \cos(\sqrt{x}))$.

Beispiel: Berechne $\int \left(\frac{\log(\log(x))}{x}\right) dx$:
Wir substituieren $u = \log(x)$. Es gilt $du = \frac{1}{x}\ dx \Rightarrow dx = x\ du$. Wir erhalten also:
$\int \left(\frac{\log(\log(x))}{x}\right) dx = \int \frac{\log(u)}{x} \cdot x\ du = \int \log(u)du = u \log(u) - \int u \cdot \frac{1}{u}\ du = u \log(u) - u = u(\log(u) - 1)$
(siehe *4.3.1, Beispiel 2*). Durch Rücksubstitution erhalten wir folgende Lösung: $\int \left(\frac{\log(\log(x))}{x}\right) dx = \log(x) \cdot (\log(\log(x)) - 1)$.

Beispiel: Berechne $\int \left(\frac{1}{\sin(x)}\right) dx$:
Wir substituieren $x = 2u$ (damit wir die Winkelverdopplung verwenden können). Es gilt $du = \frac{1}{2} dx \Rightarrow dx = 2\ du$. Wir erhalten also:
$\int \left(\frac{1}{\sin(x)}\right) dx = \int \left(\frac{1}{\sin(2u)}\right) 2du =$

$\int \left(\frac{1}{2\sin(u)\cos(u)}\right)2du = \int \left(\frac{1}{\sin(u)\cos(u)}\right)du = \int \left(\frac{\sin^2(u)+\cos^2(u)}{\sin(u)\cos(u)}\right)du$ (da $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ ist) $= \int \left(\frac{\sin(u)}{\cos(u)}\right)du + \int \left(\frac{\cos(u)}{\sin(u)}\right)du = \int \tan(u)du + \int \cot(u)du = -\ln|\cos(u)| + \ln|\sin(u)| = \ln|sin(u)| - \ln|\cos(u)| = \ln\left|\frac{\sin(u)}{\cos(u)}\right| = \ln|\tan(u)|$. Durch Rücksubstitution erhalten wir folgende Lösung: $\int \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)dx = \ln|\tan(\frac{x}{2})|$.

Beispiel: Berechne $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)-4}dx$:
Wir substituieren $u = \cos(x)$. Es gilt: $du = -\sin(x)\ dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin(x)}$. Wir erhalten also:
$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)-4} = \int \frac{\sin(x)}{u^2-4} \cdot \frac{du}{-\sin(x)} = \int \frac{-1}{u^2-4}du = \frac{1}{4}(\ln|\frac{u}{2}+1| - \ln|\frac{u}{2}-1|)$. Durch Rücksubstitution erhalten wir folgende Lösung: $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)-4}dx = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\cos(x)}{2}+1\right| - \ln\left|\frac{\cos(x)}{2}-1\right|\right)$.

Beispiel: Berechne $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$:
Wir substituieren $u = \frac{1}{x}$. Es gilt: $du = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2\ du$. Wir erhalten also:
$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx = \int \frac{e^u}{x^3}\cdot(-x^2)du = \int -\frac{e^u}{x}du$. Man beachte, dass $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$, wodurch gilt: $\int -\frac{e^u}{x}du = -\int e^u u\ du$. Durch partielle Integration (siehe *4.3.1, Beispiel 1*) erhalten wir: $-\int e^u u = -(ue^u - e^u) = e^u - ue^u$. Durch Rücksubstitution erhalten wir folgende Lösung: $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Beispiel: Berechne $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-e^x}}dx$:
Wir substituieren $u = \sqrt{e^x-e^2}$. Es gilt: $du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-e^2}}dx \Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{e^x-e^2}}{e^x}du$. Wir erhalten also:
$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-e^2}}dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{e^x-e^2}}{e^x}du$. Man beachte, dass $u = \sqrt{e^x-e^2}$, wesshalb gilt: $\int \frac{1}{u}\cdot\frac{2\sqrt{e^x-e^2}}{e^x}du = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{2u}{e^x}du = \int \frac{2}{e^x}du$. Desweitern erhalten wir durch Umformung: $u = \sqrt{e^x-e^2} \Rightarrow u^2 = e^x + e^2 \Rightarrow e^x = u^2 + e^2$, wodurch gilt: $\int \frac{2}{e^x}du = \int \frac{2}{u^2+e^2}du = \frac{2}{e^2}\cdot\int \frac{1}{(\frac{u}{e})^2+1}du$. Wir substituieren $v = \frac{u}{e}$. Es gilt $dv = \frac{1}{e}\ du \Rightarrow du = e\ dv$. Wir erhalten also: $\frac{2}{e^2}\cdot\int \frac{1}{(\frac{u}{e})^2+1}du = \frac{2}{e^2}\cdot\int \frac{1}{(v^2+1)}\cdot e\ dv = \frac{2}{e^2}\cdot e\cdot\int \frac{1}{(v^2+1)}\cdot dv = \frac{2}{e^2}\cdot e\cdot\arctan(v) = \frac{2}{e}\cdot\arctan(v)$. Durch Rücksubstitution von zuerst $v = \frac{u}{e}$ und danach $u = \sqrt{e^x-e^2}$ erhalten wir folgende Lösung: $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-e^x}}dx = \frac{2}{e}\cdot\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-e^2}}{e}\right)$.

4.3.4 Partialbruchzerlegung

Die Methode der **Partialbruchzerlegung** hilft uns vor allem bei der Integration von Polynom-Brüchen.
Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome. Wir betrachten das Integral $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$. Wir berechnen das Integral in mehreren Schritten:

1. Prüfe den Grad von p und q. Falls $deg(p) \geq deg(q)$, dann führe eine Polynomdivision durch, so dass wir dann das äquivalente Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ erhalten. Die Schwierigkeit hat sich nun auf den Bruch $\frac{r(x)}{q(x)}$ reduziert.
2. Jetzt gilt sicher $deg(p) < deg(q)$. Berechne die Nullstellen von $q(x)$.
3. Für jede Nullstelle erstellen wir einen Partialbruch mit folgendem Ansatz:
   - Einfache, reelle Nullstelle
     $x_1 \rightarrow \frac{A}{x-x_1}$
   - r-fache, reelle Nullstelle
     $x_1 \rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   - Einfache, komplexe Nullstelle
     $x^2+px+q \rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
   - r-fache, komplexe Nullstelle
     $x^2+px+q \rightarrow \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+px+q} + ...$
4. Als letztes müssen wir noch die Parameter $A_1...A_n$ (bzw. auch $B_1...B_n$) bestimmen. Wir veranschaulichen das anhand eines Beispiels:
   Wir zerlegen den Bruch $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ in die Partialbrüche $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$. Danach multiplizieren wir beide Seiten mit dem gesamten Nenner x^2-3x+2 und erhalten nach Umformung $x+1 = x(A+B) - 2A - B$. Daraus folgt, dass $A+B = 1$ und $-2A-B = 1$ sein muss. Lösen wir das Gleichungssystem, erhalten wir $A = -2$ und $B = 3$ und schlussendlich: $\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$

4.3.5 Polynomdivision - Beispiel

Beispiel:
Sei $f(x) = \frac{-2x^3-4x+8}{x-2}$. Wir berechnen:
$(-2x^3+0x^2-4x+8) : (x-2) =?$. Wir beginnen mit $-2x^3 : x = -2x^2$. Danach mutliplizieren wir $-2x^2\cdot(x-2) = -2x^3+4x^2$ und ziehen das von unserem Anfangspolynom ab:
$(-2x^3+0x^2-4x+8) - (-2x^3+4x^2) = -4x^2-4x+8$. Wir erhalten also:
$(-4x^2-4x+8) : (x-2) = -2x^2$. Wir beginnen wieder von vorne, dividieren $-4x^2 : x = -4x$, multiplizieren $-4x\cdot(x-2) = -4x^2+8x$ und ziehen das ab:
$(-4x^2-4x+8) - (-4x^2+8) = -12x+8$. Wir erhalten:
$(-12x+8) : (x-2) = -2x^2-4x$. Wir beginnen wieder von vorne, dividieren $-12x : x = -12$, multiplizieren $-12\cdot(x-2) = -12x+24$ und ziehen das ab:
$(-12x+8) - (-12x+24) = -16$. Hier ist -16 unser Rest und wir erhalten als Lösung unserer Polynomdivision:
$\frac{-2x^3-4x+8}{x-2} = -2x^2-4x-12-\frac{16}{x-2}$

4.4 Uneigentliche Integrale

Ein Integral $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet man als **uneigentlich**, wenn eine oder beide Grenzen (a und b) des Integrales nicht im Definitionsbereich von f liegen. Die genaue Definition lautet wie folgt:

Definition: Uneigentliches Integral
Sei $f(x)$ $:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion definiert auf dem offenen Intervall $]a,b[$ und sei f auf allen Intervallen $[c,d]$ mit $c,d \in]a,b[$ integrierbar. Dann wird das sog. uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ definiert als:
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\rightarrow a^+}\lim_{d\rightarrow b^-}\int_c^d f(x)dx$

Dies gilt auch für die folgenden Integrale:

- $f(x) : [0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\int_0^\infty f(x)dx$
  $= \lim_{b\rightarrow\infty}\int_a^b f(x)dx$
- $f(x) :]-\infty,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$
  $= \lim_{a\rightarrow-\infty}\int_a^b f(x)dx$

McLaurin
Sei $f : [1,\infty[\rightarrow [0,\infty[$ monoton fallend. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert.

Definition: Ein uneigentliches Integral bezeichnet man als *konvergent*, wenn es existiert (das heisst der Grenzwert nimmt einen Wert aus $\mathbb{R}$ an). Ansonsten bezeichnet man es als *divergent*.

Die **Konvergenz eines uneigentlichen Integrals** lässt sich gut durch das Majorantenkriterium zeigen. Kann gezeigt werden, dass das Integral durch $\int_1^b \frac{1}{x^s}dx$ mit $s > 1$ nach oben beschränkt ist, dann muss es konvergent sein.

Das selbe geht auch in die andere Richtung. Die **Divergenz eines uneigentlichen Integrals** lässt sich gut durch das Minorantenkriterium zeigen. Kann gezeigt werden, dass das Integral $\geq \int_a^b \frac{1}{x}dx$ ist, dann muss es divergent sein.

Behauptung: Es gilt: $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ konvergiert für $\forall s > 1$.

Gaussches Integral: Es gilt: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Behauptung: Vergleichskriterium
Seien $f,g :]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in]a,b[$. Dann gilt:

- $\int_a^b g(x)dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ konvergent
- $\int_a^b f(x)dx$ divergent $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ divergent

Definition: Leibnitz-Kriterium

1. Sei $f(x)$ auf $[a,\infty[$ stetig, monoton fallend und sei $\lim_{x\rightarrow\infty} f(x) = 0$, dann konvergieren die Integrale $\int_a^\infty f(x)\sin(x)dx$ und $\int_a^\infty f(x)\cos(x)dx$.
2. Sei $f(x)$ auf $]a,b]$ stetig. Ist die Funktion $f(x)(x-a)^2$ monoton wachsend und gilt $\lim_{x\rightarrow a^+} f(x)(x-a)^2 = 0$, dann konvergieren folgende Integrale:
   - $\int_a^b f(x)\sin(\frac{1}{x-a})dx$
   - $\int_a^b f(x)\cos(\frac{1}{x-a})dx$

4.4.1 Beispiele

Beispiel: Berechne den Wert von $\int_{-\infty}^\infty \sin(x)\cdot e^{-x^2}dx$

1. Es gilt: $\int_{-\infty}^\infty \sin(x)\cdot e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \sin(x)\cdot e^{-x^2}dx + \int_0^\infty \sin(x)\cdot e^{-x^2}dx$
2. $\lim_{b\rightarrow+\infty}\int_0^b \sin(x) \cdot e^{-x^2}dx = \lim_{b\rightarrow+\infty}\frac{-\sin(b)\cdot e^{-b^2}}{b} - \frac{1}{2}\cos(b)e^{b^2}$

Referenz-Integrale:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \infty$ für $p \leq 1$

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ für $p > 1$
- $\int_0^a \frac{1}{x \cdot log(x)} dx$ divergiert

4.5 Beispiele und Aufgaben

4.5.1 Beweise

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig integrierbare Funktion. Dann existiert ein $c \in]a,b[$, so dass $\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$. **Korrekt**

Da f integrierbar ist, existiert eine Stammfunktion $F(x)$ zu f. F ist naürlich stetig auf $[a,b]$, da sie differenzierbar ist mit $F^(x) = f(x)$.
Wir wollen zeigen, dass es ein $c \in]a,b[$ gibt, so dass

$$\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx = 0$$

Betrachten wir also mal die Funktion

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_a^t f(x)dx - \int_t^b f(x)dx \\ &= F(t) - F(a) - F(b) + F(t) \\ &= 2F(t) - F(a) - F(b) \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt also die Existenz einer Nullstelle von G beweisen. Das geht am einfachsten über den Zwischenwertsatz. G ist auch stetig, da G die Differenz zweier stetigen Funktionen ist. Um den ZWS anwenden zu können, müssen wir einen Wert ≥ 0 und ≤ 0 finden. Berechnen wir dazu $G(a)$ und $G(b)$:

$$G(a) = 2F(a) - F(a) - F(b) = F(a) - F(b)$$
$$G(b) = 2F(b) - F(a) - F(b) = F(b) - F(a) - G(a)$$

Wir sehen also, dass $G(a)$ und $G(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben (sofern beide $\neq 0$ sind). Falls entweder $G(a) = 0$ oder $G(b) = 0$, dann wäre das jeweils die gesuchte Nullstelle. Ansonsten gilt mit dem ZWS, dass eine Nullstelle $c \in]a,b[: G(c) = 0$ existieren muss.

b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist f beschränkt, d.h. $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$. **Korrekt**

Wir zeigen die Behauptung indirekt. Sei f unbeschränkt, dann kann f nicht integrierbar sein. O.b.d.A. nehmen wir an, f sei nach oben unbeschränkt. Wir wollen zeigen, dass f nicht integrierbar sein kann, also dass

$$\exists \epsilon > 0, \ \forall P : |\underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P)| > \epsilon$$

Wählen wir also ϵ beliebig, z.B. $\epsilon = 1$. Wir wollen jetzt zeigen, dass für alle Partitionierungen P von $[a,b]$ die Differenz der Ober- und Untersumme grösser als ϵ wird.
Sei P eine beliebige Partitionierung. Da f nach oben unbeschränkt ist, gibt es zu P ein Teilintervall I_{i_0}, über dem f unbeschränkt ist, also $\sup_{x \in I_{i_0}} f(x) = \infty$. O.b.d.A. sei f nur in diesem Teilintervall unbeschränkt. Damit können wir die Differenz der Ober- und Untersumme umschreiben zu

$$\begin{aligned} &|\underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P)| \\ &\quad = |\sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n (|\inf_{x \in I_i} f(x) - \sup_{x \in I_i} f(x)|) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= (|\inf_{x \in I_{i_0}} f(x) - \sup_{x \in I_{i_0}} f(x)|) \cdot (x_{i_0} - x_{i_0 - 1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq} (|\inf_{x \in I_i} f(x) - \sup_{x \in I_i} f(x)|) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \infty > 1 = \epsilon \end{aligned}$$

Man beachte, dass $(|\inf_{x \in I_{i_0}} f(x) - \sup_{x \in I_{i_0}} f(x)|) \cdot (x_{i_0} - x_{i_0 - 1}) = \infty$ ist, da f nach oben unbeschränkt ist in I_{i_0}.

c) Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige (und somit integrierbare) Funktion. Dann existiert $c \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Korrekt
Wir schränken das Integral $\int_a^b f(x)dx$ ein. Sei $s = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ und $S = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Dann gilt

$$s \leq f(x) \leq S \ \forall x \in [a,b]$$
$$\Rightarrow \int_a^b s \ dx \leq \int_a^b f(x) \ dx \leq \int_a^b S \ dx$$
$$\Leftrightarrow s(b-a) \leq \int_a^b f(x) \ dx \leq S(b-a)$$

Da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in [a,b]$, so dass gilt

$$f(c) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) \ dx$$

wie gewünscht.

d) Erweiterter Mittelwertsatz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert $c \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x) \ dx = f(c) \int_a^b g(x) \ dx$$

Falsch
Diese Aussage gilt nicht generell. Wir zeigen dies anhand eines Gegenbeispiels. Seien $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) = x$. Dann müsste gelten

$$\begin{aligned} \exists c \in [-1,1] : \int_{-1}^1 x^2 \ dx &= c \cdot \int_{-1}^1 x \ dx \\ \Leftrightarrow \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 &= c \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &= c \cdot 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für kein $c \in [-1,1]$ erfüllbar.

4.5.2 Leibnitz-Kriterium für Integrale

Untersuche folgendes Integral auf Konvergenz, ohne es zu berechnen:

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \ dx$$

Das uneigentliche Integral lässt sich umschreiben zu

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \ dx$$

Wir müssen das Integral jetzt geschickt abschätzen. Das tun wir, indem wir es aufteilen in

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to \infty} \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \ dx + \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \ dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \ dx + \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \ dx \end{aligned}$$

Das erste Integral ist nicht mehr uneigentlich und hat einen konstanten Wert aus $\mathbb{R}$, da $\frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}$ stetig über $[0,1]$ ist. Das zweite Integral untersuchen wir weiter:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \ dx &\geq \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}} \ dx \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{2}}\Big|_1^t = \infty \end{aligned}$$

Insgesamt konvergiert also das uneigentliche Integral nicht.

5 Kurvendiskussion

5.1 Begriffe und Korollare

Es gilt:

- $f'(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow f(x)$ konstant
- $f'(x) = g'(x) \ \forall x \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = g(x) + c$
- $f'(x) \geq (>) \ 0 \ \forall x \Rightarrow f(x)$ (strikt) monoton wachsend
- $f'(x) \leq (<) \ 0 \ \forall x \Rightarrow f(x)$ (strikt) monoton fallend

Korollar: Falls es $M \geq 0$ mit $|f'(x)| \leq M \ \forall x$ gibt, dann folgt $\forall x_1, x_2 : |f(x_1) - f(x_2)| \leq M \cdot |x_1 - x_2|$

Definition: Kritische Punkte
Punkte in welchen $f'(x) = 0$ gilt oder $f'(x)$, $f(x)$ nicht existieren, nennen wir kritische Punkte.

Bemerkung:

- n gerade und x_0 lokale Extremstelle $\Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) = 0$.
- n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ eine strikt lokale Minimalstelle.
- n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ eine strikt lokale Maximalstelle.

5.2 Komplette Kurvendiskussion

Symmetrie:

- Achsensymmetrisch/Gerade: $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$
- Punktsymmetrisch/Ungerade: $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$

Grenzverhalten:

- Limes für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ bestimmen
- Limes für allfällige kritische Punkte bestimmen

Nullstellen:

- Punkte berechnen wo $f(x) = 0$ gilt (Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse)
- Punkte bestimmen wo $f(0) = a$ gilt (Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse)

Extremstellen:

1. Berechnung aller kritischen Punkte (u.a. (Grenz-) Werte des Intervalls)

2. Berechnung der ersten Ableitung und der Punkte, wo $f'(x_E) = 0$ gilt.
3. Berechnung der zweiten Ableitung und von $f''(x_E) = a$:
    - $a < 0$: lokales Maximum
    - $a > 0$: lokales Minimum
    - $a = 0$: keine Aussage möglich

Sattelpunkte: Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_S) = 0$
- $f'''(x_S) \neq 0$
- $f'(x_S) = 0$

Wendepunkte: Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_W) = 0$
- $f'''(x_W) \neq 0$
- $f'(x_W) \neq 0$

Krümmung: Berechnung der Zweiten Ableitung:

- $f''(x) > 0 \rightarrow$ linksgekrümmt (*konvex*)
- $f''(x) > 0 \rightarrow$ rechtsgekrümmt (*konkav*)

Definition:
f ist (*streng*) konvex auf I falls $\forall x (<) \leq y,\ x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y)(<) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

f ist (*streng*) konvex $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 < x < x_1 \in I$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(<) \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$.

6 Trigonometrie und Geometrie

6.1 Winkel in Grad und Rad

deg	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

6.2 Korollare

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1$
- $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ und $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$

Periodizität:

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$, $\cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

Parität:

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$, $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

Ergänzende Winkel:

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$, $\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

Komplementärwinkel:

- $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot(\alpha)$, $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan(\alpha)$

Doppelwinkel:

- $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Quadrat:

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

Addition:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-(\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta))}$
- $\cot(\alpha + \beta) = -\frac{1-(\cot(\alpha) \cdot \cot(\beta))}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$
- $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Subtraktion:

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+(\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta))}$
- $\cot(\alpha - \beta) = -\frac{1+(\cot(\alpha) \cdot \cot(\beta))}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}$
- $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Multiplikation

- $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

6.3 Geometrie

6.3.1 Gleichungen

Kreisgleichung:
Die allgemeine Formel für einen Kreis mit Mittelpunkt $(m1, m2)$ und Radius r lautet:
$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$

7 Multiplechoice

7.1 Tricks

- Absolut konvergent $\Rightarrow$ jede beliebige Umordnung der Glieder gibt wieder eine konvergente Folge/Reihe mit selbem Grenzwert.
- Nur konvergent $\Rightarrow$ es existiert eine Umordnung der Glieder welche divergiert.
    - alternierende harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a,b] \Rightarrow f$ ist in $[a,b]$ gleichmässig stetig.
- $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ integrierbar.
- $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f$ integrierbar.
- differenzierbar $\Rightarrow$ stetig $\Rightarrow$ integrierbar
- integrierbar $\not\Rightarrow$ stetig.
    - Gegenbeispiel: $f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x \leq 0$, $f(x) = 1$, für $x > 1$. f ist integrierbar über $[-1,1]$ mit $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$ (lässt sich leicht mit der Riemann-Summe nachrechnen). Aber offensichtlich ist f nicht stetig bei $x = 0$.
- Gleichmässige Stetigkeit ist stärker als punktweise Stetigkeit: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ gleichmässig stetig $\Rightarrow$ punktweise stetig
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ konvergiert: alternierende harmonische Reihe
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ divergiert: harmonische Reihe
- Nullfolgenkriterium:
    - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} a_n = 0$
    - $\lim_{n\rightarrow\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert
    - $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert
- Absolute Konvergenz: Wenn eine Reihe konvergiert und all ihre Terme ≥ 0 sind, dann konvergiert die Reihe auch absolut.
- $\lim_{x\rightarrow 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\rightarrow\infty} x_n = 0$, gilt $\lim_{n\rightarrow\infty} f(x_n) = 1$
- Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$ definiert eine stetige Funktion im Inneren des Konvergenzkreises.
- x^n ist monoton wachsend, falls n ungerade ist.
- Ein Polynom mit ungeradem Grad besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
- $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.
- $\exists M \geq 0 : |f'(x_0)| \leq M\ \forall x_0 \in]a,b[\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$
- Die Folge $\{f_n(x)\}_{n=4}^{\infty}$ definiert durch

$$\begin{cases} n\sin(nx), & \text{für} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0), & \text{für} \frac{\pi}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

ist auf $[0,1]$ punktweise gegen $f(x) = 0$ konvergent. Sie ist jedoch nicht gleichmässig konvergent.

7.2 Beispiele

8 Verschiedene Aufgaben

8.1 Übungsaufgaben

8.1.1 8.3. Eine Funktionenreihe

Die Funktion $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt: $\langle x\rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion:

$$\langle x\rangle := \begin{cases} x - [x], & \text{falls} x - [x] \leq \frac{1}{2} \\ 1 - (x - [x]), & \text{falls} x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiert die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}, \ x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist:
Es gilt für jedes $y \in \mathbb{R} : |\langle y\rangle| < 1$, also

$$\frac{|\langle 10^k x\rangle|}{10^k} \leq \frac{1}{10^k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle 10^k x\rangle|}{10^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} < +\infty,$$

damit ist die Reihe absolut konvergent auf $\mathbb{R}$.
b) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}$. Konvergiert f_n nach f gleichmässig?
Um gleichmässige Konvergenz zu beweisen, beobachten wir, dass *für jedes $x \in \mathbb{R}$* gilt:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \Big| \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k} \Big| \\ &= \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k} \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \to 0 \ \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt $\lim_{x\to\infty}(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|) = 0$. **c) Ist f stetig?**
Stetigkeit von f folgt direkt aus Satz 3.7.4 (zweiter Satz in *Kap. 2.5*).

8.1.2 9.4 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Sei $f(t)$ definiert durch

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin(\frac{1}{t}), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:
a) f ist differenzierbar:
Für $t \neq 0$ können wir f mit der Kettenregel ableiten und erhalten

$$f'(t) = 1 + 4t \sin\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{-1}{t^2} = 1 + 4t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

In $t = 0$ berechnen wir die Ableitung direkt mit dem Differenzialquotienten

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \left(1 + 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) = 1.$$

Der Grenzwert folgt, da $|t \sin(\frac{1}{t})| \leq |t|$ gegen 0 konvergiert. Also gilt

$$f'(t) = \begin{cases} 1 + 4t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

b) f' ist beschränkt und unstetig:
Aus $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ erhalten wir für $t \in]-1,1[$ die Abschätzung

$$|f'(t)| \leq 1 + 4|t| + 2 \leq 7$$

und somit ist f' beschränkt. Anderseits ist f' unstetig in 0. Wir zeigen dies mit dem Folgenkriterium und betrachten die Folge $t_k = \frac{1}{2\pi k}$, welche gegen 0 konvergiert. Dann gilt $f'(t_k) = -1$ für alle k und folglich kann $f'(t_k)$ nicht gegen $f'(0) = 1$ konvergieren.

c) $f'(0) = 1$, aber f ist auf keinem Intervall $]-\epsilon, \epsilon[\ , \epsilon > 0$, monoton wachsend:
Wir haben bereits in (a) gesehen, dass $f'(0) = 1$ gilt. In (b) haben wir eine Folge $t_k \to 0$ angegeben für die $f'(t_k) = -1 < 0$ gilt. Betrachte nun zusätzlich die Folge $\tilde{t_k} := \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Die Folge $\tilde{t_k}$ konvergiert ebenfalls gegen 0 und erfüllt $f'(\tilde{t_k}) = 3$. Wir sehen also, dass f' in jedem (beliebig kleinen) Intervall $]-\epsilon, \epsilon[$ positive und negative Werte annimmt. Insbesondere kann f auf keinem solchen Intervall monoton sein.

8.1.3 10.2. Ableitung III

Diskutieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{2}\log(1 + e^{2x}) + \arctan(e^x)$$

im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, Konvexität und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Aus der Stetigkeit von $\log(x)$ und $\arctan(x)$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}\log(1) + \arctan(0) = 0$$

und, da $f(x) \geq \log(e^{2x}) = 2x$ gilt, strebt $f(x)$ gegen $+\infty$ für $x \to \infty$.
Die erste Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} + \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} = \frac{e^{2x} + e^x}{1 + e^{2x}}.$$

Insbesondere sehen wir, dass $f'(x) > 0$ für alle x gilt. Damit ist f streng monoton wachsend und besitzt keine Extremalstellen.
Die zweite Ableitung ergibt sich mit der Quotientenregel als

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2e^{2x} + e^x)(1 + e^{2x}) - 2e^{2x}(e^{2x} + e^x)}{(1 + e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2}(1 + 2e^x - e^{2x}). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von $f''(x)$ ist bestimmt durch den Ausdruck $(1 + 2e^x - e^{2x}) = q(e^x)$, wobei $q(z) = -z^2 + 2z + 1$. Die Nullstellen von q sind gegeben durch

$$\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = 1 \mp \sqrt{2}$$

und somit ist $q(z)$ in dem Intervall $]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$ positiv und in dem Komplement $\mathbb{R} \setminus [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ negativ. Damit folgern wir,

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow q(e^x) < 0 \Leftrightarrow e^x > \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x > \log(\sqrt{2} + 1)$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow q(e^x) > 0 \Leftrightarrow e^x < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x < \log(\sqrt{2} + 1).$$

Das bedeutet, f ist auf $]-\infty, \log(1+\sqrt{2})]$ konvex, auf $[\log(1+\sqrt{2}), \infty[$ konkav und besitzt in $\log(1 + \sqrt{2})$ einen Wendepunkt.

8.1.4 10.3. Konstruktion einer cutoff-Funktion

Wir definieren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) := f(1) - f(1 - x)$$

Tipp: *Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig oft differenzierbar.*
a) Zeige, dass f und g glatte Funktionen sind:
Wir zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Daraus folgt dann sofort, dass g ebenfalls beliebig oft differenzierbar ist.
Man sieht leicht, dass f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und wir behaupten, dass die n-te Ableitung von f die Folgende Gestalt hat:

$$f^{(n)}(x) := \begin{cases} R_n(x)e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

wobei $R_n(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ eine rationale Funktion ist mit Polynomen $p_n(x)$ und $q_n(x)$. Da f für $x < 0$ konstant verschwindet, folgt sofort, dass $f^{(n)}(x) = 0$ für $x < 0$ gilt. Für $x > 0$ zeigen wir die Behauptung mittels Induktion. Zunächst gilt für $n = 1$

$$f^{(}x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

und somit gilt die Behauptung mit $R_1(x) = \frac{1}{x^2}$. Im Induktionsschritt berechnen wir

$$f^{(n+1)}(x) = (R_n(x)e^{-\frac{1}{x}})' = (R_n'(x) + \frac{1}{x^2}R_n(x))e^{-\frac{1}{x}}$$

und die Behauptung folgt mit

$$R_{n+1} = R_n'(x) + \frac{1}{x^2}R_n(x) = \frac{p_n'(x)q_n(x) - p_n(x)q_n'(x)}{q_n(x)^2} + \frac{p_n(x)}{x^2 q_n(x)}.$$

Wir folgern nun, dass $f^{(n)}$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ besitzt, da für genügend grosses $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^+} R_n(x)e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (R_n(x)x^m)(x^{-m}e^{-\frac{1}{x}}) = 0$$

In dem letzten Grenzwert haben wir verwendet, dass $R_n(x)x^m$ für $x \to 0$ gegen 0 konvergiert, falls m grösser als der Grad von $q_n(x)$ ist, sowie den bekannten Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-m}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0.$$

Nach dem Differenzierbarkeitssatz, ist f dann an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und für die Ableitungen gilt $f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. (**Bemerkung:** Genau genommen sagt der Differenzierbarkeitssatz nur etwas über die erste Ableitung aus. Mit $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)'$ können wir ihn aber induktiv anwenden und erhalten die benötigte Aussage für die n-te Ableitung.)

b) Zeige, dass g monoton wachsend ist, $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$ gilt und, für $x \geq 1$, $g(x) = f(1)$ erfüllt ist:
Wir haben bereits gesehen, dass $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ und $f'(x) = 0$ für $x \leq 0$ gilt. Somit ist f monoton wachsend und, da $g'(x) = f'(1-x)$ gilt, ist g ebenfalls monoton wachsend. Die zweite Behauptung, $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$, ergibt sich aus

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(1-x) \Leftrightarrow x > 0$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow f(1) < f(1-x) \Leftrightarrow x < 0.$$

Schliesslich beobachten wir für $x > 1$, dass $f(1-x) = 0$ gilt und somit $g(x) = f(1) - f(1-x) = f(1)$ erfüllt ist.

c) Zeige, dass $\beta(x) = e^e f(g(x))$ monoton wachsend ist und für $x \leq 0$ gleich null und für $x \geq 1$ gleich eins ist:
Mit der Kettenregel folgt $\beta'(x) = e^e f'(g(x))g'(x)$. Da f und g nach Teil (b) monoton wachsend sind, gilt $f'(g(x)) \geq 0$ und $g'(x) \geq 0$. Also gilt auch $\beta'(x) \geq 0$ und somit ist β monoton wachsend.
In Teil (b) haben wir gesehen, dass $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$ gilt. Insbesondere folgt aus $x \leq 0$ also $g(x) \leq 0$ und somit ist $\beta(x) = e^e f(g(x)) = 0$ erfüllt. Falls $x \geq 1$ gilt, haben wir in Teil (b) gesehen, dass $g(x) = f(1)$ gilt und somit

$$\beta(x) = e^e f(f(1)) = e^e f(e^{-1}) = e^e e^{-1} = 1.$$

d) Konstruiere für $a < b$ und $\epsilon > 0$ eine C^∞-Funktion $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\rho(x) = 1$ für $x \in [a,b]$ und $\rho(x) = 0$ für $x \notin [a-\epsilon, b+\epsilon]$:
Wir definieren die glatten Funktionen $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$\rho_1(x) := \beta\Big(\frac{x-(x-\epsilon)}{\epsilon}\Big) \quad \rho_2(x) := \beta\Big(\frac{b+\epsilon-x}{\epsilon}\Big).$$

Aus Teil (b) folgt, dass ρ_1 monoton wachsend ist mit $\rho_1(x) = 0$ für $x \leq (a-\epsilon)$ und $\rho_1(x) = 1$ für $x \geq a$, und, dass ρ_2 monoton fallend ist mit $\rho_2(x) = 1$ für $x \leq b$ und $\rho_2(x) = 0$ für $x \geq (b+\epsilon)$. Dann erfüllt

$$\rho : \mathbb{R} \to [0,1], \quad \rho(x) = \rho_1(x) \cdot \rho_2(x)$$

die geforderten Eigenschaften: $\rho(x) = 1$ für $x \in [a,b]$, $\rho(x) = 0$ für $x \notin [a-\epsilon, b+\epsilon]$ und ρ ist monoton wachsend bzw. fallend auf den Intervallen $[a-\epsilon, a]$ und $[b, b+\epsilon]$.

8.1.5 13.4. Unbestimmte Integrale

Wir betrachten für $b > a^2$ die Funktion

$$f_(x) := \frac{1}{(x^2+2ax+b)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und definieren die unbestimmten Integrale (bzw. Stammfuktionen)

$$F_k(x) := \int f_k(x)dx, \quad G_k(x) := \int xf_k(x)dx.$$

Beachte, dass die Funktionen nur bis auf die Addition einer Konstante eindeutig bestimmt sind. **a) Berechnen Sie explizite Ausdrücke für $F_1(x)$ und $G_1(x)$:**
Wir formen $f_1(x)$ mittels quadratischer Ergänzung um und erhalten

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+2ax+b} = \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2} = \frac{1}{b-a^2}\cdot\frac{1}{\Big(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\Big)^2+1}$$

Damit sieht man direkt (oder mit Substitution $y = \frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}$), dass

$$F_1(x) = \int f_1(x)dx = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\Big(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\Big)$$

eine Stammfunktion für $f_1(x)$ ist.
Um eine Stammfunktion für $xf_1(x)$ zu finden, schreiben wir

$$xf_1(x) = \frac{x}{x^2+2ax+b} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2a}{x^2+2ax+b} - \frac{a}{x^2+2ax+b}.$$

Dabei hat der erste Bruch die Gestalt $\frac{h'(x)}{h(x)}$ mit $h(x) = x^2+2ax+b$. Mit der Substitution $y = h(x)$ folgt dann

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \int xf_1(x)dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2ax+b| - aF_1(x) \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+2ax+b| - \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\Big(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\Big). \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie, dass für $k > 1$ (und geeignete Konstanten) die Folgenden Rekursionsformeln erfüllt sind:

$$G_k(x) = \frac{1}{2-2k}f_{k-1}(x) - aF_k(x)$$

$$F_k(x) = \frac{x+a}{(2k-2)(b-a^2)}f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(2k-2)(b-a^2)}F_{k-1}(x).$$

Tipp: *Verwenden Sie partielle Integration oder vergleichen Sie die Ableitungen der jeweiligen Ausdrücke um die Rekursion zu verifizieren.*
Beachte zunächst die Identität

$$f'_{k-1}(x) = -(k-1)f_k(x)(2x+2a) = (2-2k)xf_k(x) + a(2-2k)f_k(x).$$

Da $f_{k-1}(x)$ offensichtlich eine Stammfunktion für $f'_{k-1}(x)$ ist und eine Stammfunktion für den Ausdruck auf der rechten Seite durch $2(1-k)G_k(x) + 2a(1-f)F_k(x)$ gegeben ist, folgt

$$f_{k-1}(x) = (2-2k)G_k(x) + a(2-2k)F_k(x) + C_k$$

für eine Konstante $C_k \in \mathbb{R}$ oder äquivalent

$$G_k(x) - \frac{C_k}{2-2k} = \frac{1}{2-2k}f_{k-1}(x) - aF_k(x).$$

Wenn wir $G_k(x)$ durch $\frac{G_k(x)-C_k}{(2-2k)}$ ersetzten, ist die erste Rekursion erfüllt.
Die zweite Rekursionsformel bestimmen wir mit einem analogen Ansatz, wobei wir die Ableitung von $xf_{k-1}(x)$ betrachten. In der Rechnung verwenden wir die Formel für $f'_{k-1}(x)$ von oben und erhalten

$$\begin{aligned} (xf_{k-1}(x))' &= f_{k-1}(x) + xf'k-1(x) = f_{k-1}(x) \\ &- x(k-1)(2x+2a)f_k(x) \\ &= f_{k-1}(x) - (2k-2)(x^2+ax)f_k(x) \\ &= f_{k-1}(x) - (2k-2)axf_k(x) - (2k-2)x^2f_k(x) \\ &= f_{k-1}(x) - (2k-2)axf_k(x) - (2k-2)f_{k-1}(x) \\ &+ (2k-2)(2ax+b)f_k(x) \\ &= (3-2k)f_{k-1}(x) + a(2k-2)xf_k(x) + b(2k-2)f_k(x) \end{aligned}$$

Indem wir zu Stammfunktionen übergehen, erhalten wir

$$xf_{k-1}(x) = (3-2k)F_{k-1}(x) + a(2k-2)G_k(x) + b(2k-2)F_k(x) + \tilde{C_k}$$

für eine Konstante $\tilde{C_k} \in \mathbb{R}$. Mit der ersten Rekursionsformel folgt nun

$$xf_{k-1}(x) =$$

$$(3-2k)F_{k-1}(x) - af_{k-1}(x) - a^2(2k-2)F_k(x) + b(2k-2)F_k(x) + \tilde{C_k}$$

oder äquivalent

$$F_k(x) - \frac{\tilde{C_k}}{(2k-2)(b-a^2)} = \frac{x+a}{(2k-2)(b-a^2)}f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(2k-2)(b-a^2)}F_{k-1}(x).$$

Wenn wir $F_k(x)$ durch $\frac{F_k(x)-\tilde{C_k}}{(2k-2)(b-a^2)}$ ersetzten erhalten wir die zweite Rekursionsformel.

8.1.6 15.2 Komplexe Zahlen

Schreiben Sie $z = (2+i)e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{i-1}{2+i}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ in der Form $z = x+iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z &= (2+i)(\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)) + \frac{(i-1)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\cdot(\cos\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) \\ &+ i\sin\Big(\frac{3\pi}{2}\Big)) = 2i - 1 - i\cdot\frac{3i-1}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i. \end{aligned}$$

9 Verschiedene Funktionen

9.1 Ableitungen und Integrale

f'(x)	**f(x)**	**F(x)**
$\frac{a}{x^{a+1}}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$
$a \cdot x^{a-1}$	$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$ka^{kx}\ln(a)$	a^{kx}	$\frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$	$\ln\|\sin(x)\|$
$c\cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c}\cdot e^{cx}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x\cdot(\ln\|x\|-1)$
$kx^{k-1}\ln(x) + kx^{k-1}$	$x^k\ln(x)$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}(\ln(x)-\frac{1}{k+1})$
$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$
$\frac{1}{\ln(a)\cdot x}$	$\log_a\|x\|$	$\frac{x}{\ln(a)}\cdot(\ln\|x\|-1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\cdot\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$arcsinh(x)$	$x\cdot arcsinh(x)-\sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$arccosh(x)$	$x\cdot arccosh(x)-\sqrt{x^2-1}$

9.2 Integrale

f(x)	**F(x)**
$\int f'(x)\cdot f(x)dx$	$\frac{1}{2}\cdot(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$	$\log\|f(x)\|$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int(ax+b)^s dx$	$\frac{1}{a(s+1)}\cdot(ax+b)^{2+1},\ \forall s\neq -1$
$\int x(ax+b)^s dx$	$\frac{(ax+b)^{s+2}}{(s+2)\cdot a^2} - \frac{b(ax+b)^{s+1}}{(s+1)\cdot a^2}$
$\int(ax^p+b)^{-1}x^{p-1}dx$	$\frac{1}{ap}\cdot\log\|ax^p+b\|$
$\int(ax^p+b)^s x^{p-1}dx$	$\frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap\cdot(s+1)}$
$\int\frac{ax+b}{cx+d}dx$	$\frac{ax}{c}-\frac{ad-bc}{c^2}\cdot\ln\|cx+d\|$
$\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$	$\frac{2\arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})}{\sqrt{4ac-b^2}}$
$\int\frac{ax+b}{x^2+cx+d}dx$	$\frac{a}{2}\log\|x^2+cx+d\| + \frac{b-\frac{ac}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\cdot\arctan(\frac{x+\frac{c}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}})$
$\int\frac{1}{x^2-x}dx$	$\ln\left\|\frac{x-1}{x}\right\|$
$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$
$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx$	$\frac{1}{2a}\log\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$
$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx$	$-\frac{1}{2a}\log\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\|$
$\int\sqrt{a^2+x^2}dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\|$
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$	$\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$	$\ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\|$
$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx$	$\arcsin(\frac{x}{\|a\|})$
$\int e^{kx}\sin(ax+b)dx$	$\frac{e^{kx}}{a^2+k^2}(k\sin(ax+b)-a\cos(ax+b))$
$\int e^{kx}\cos(ax+b)dx$	$\frac{e^{kx}}{a^2+k^2}(k\cos(ax+b)+a\sin(ax+b))$
$\mathbb{I}_n=\int\sin(x)dx,\ n\geq 1$	$-\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x)+\frac{n-1}{n}\cdot\mathbb{I}_{n-2}$

9.3 Trigonometrische Ansätze

f(x)	**F(x)**
$\int_a^b\frac{1}{x^2+1}dx$	$[arctan(x)]_a^b$
$\int_a^b\frac{1}{1-x^2}dx$	$[arctanh(x)]_a^b$
$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$	$[arcsinh(x)]_a^b$
$\int_a^b\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$[arcos(x)]_a^b$
$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$[arcsin(x)]_a^b$
$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$[arcosh(x)]_a^b$
$\int_a^b\frac{1}{sin^2(x)}dx$	$-cot(x)$
$\int_a^b\frac{1}{cos^2(x)}dx$	$tan(x)$
$\int_a^b\sqrt{1+x^2}dx$	$\frac{arcsinh(x)+x-\sqrt{x^2+1}}{2}$
$\int_0^{\pi/2}cos(x)$	1
$\int_0^{\pi/2}cos^2(x)$	$\frac{\pi}{4}$
$\int_0^{\pi/2}sin(x)$	1
$\int_0^{\pi/2}sin^2(x)$	$\frac{\pi}{4}$

10 Weiteres

10.1 Exponential-Funktion und Logarithmus

10.1.1 Gleichungen und Ungleichungen

- $e \approx 2.72$, $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$
- $\exp(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ und $\exp(x) > 1,\ \forall x > 0$
- $1 + x \leq e^x$
- $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (*Bernoullische Ungleichung*)
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (*Dreiecksungleichung*)
- $\log(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x > 0$
- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ und $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$ und $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- $e^{\ln(x)} = x$ und $\ln(e^x) = x$
- $x^a = e^{a \ln(x)}$

10.1.2 Grenzwerte

Bemerkung: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für $\forall x > 0$

$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} \ln(x) = 0$
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$	$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}} = e^{mk}$
$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{mk}$	$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{mk}$
$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to 0}(1 + a(e^{-x} - 1))^{-\frac{1}{x}} = e^a$
$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$	$\lim_{n\to\infty}(1 + f(n))^{\frac{1}{f(n)}} = e$
$\lim_{x\to 0} xe^{-1} = 0$	$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x - 1}{x}\right) = \ln a,\ a > 0$	$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{x}\right) = a$	$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$	$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(x) = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1+a(e^{-x}-1))}{x} = a$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$	$a_1 = c,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right),\ \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$
$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$	$\lim_{n\to\infty} n^a \cdot q^n = 0$ für $0 \leq q < 1$
$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n} = 0$ (*Sandwich mit* $\frac{1}{2^n}$ und $\frac{2}{n}$)	$\frac{(\frac{1}{n} + n^2)^{995}}{1 + n^{1990}} = 1$ (*umformen*)

10.2 Trigonometrische Funktionen

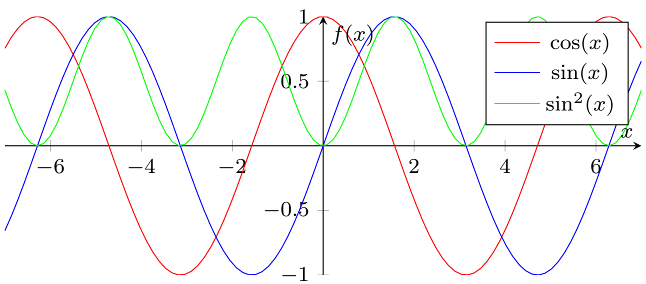
10.2.1 Ungleichungen

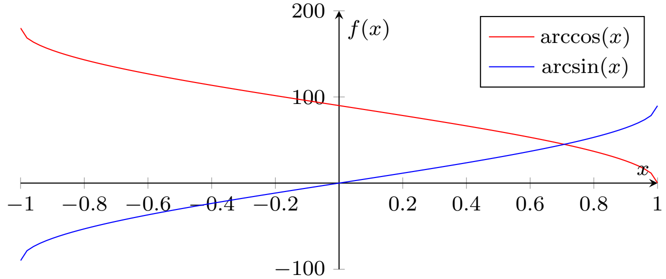
- $|\sin(x)| \leq |x|$
- $x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!},\ \forall 0 \leq x < \sqrt{6}$

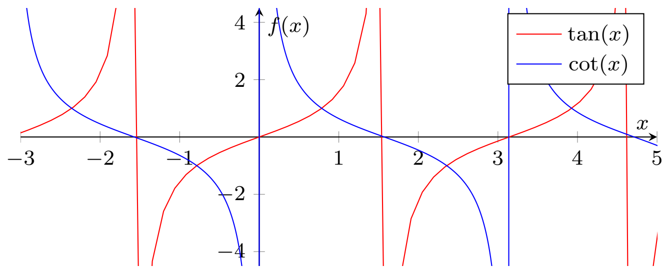
10.2.2 Grenzwerte

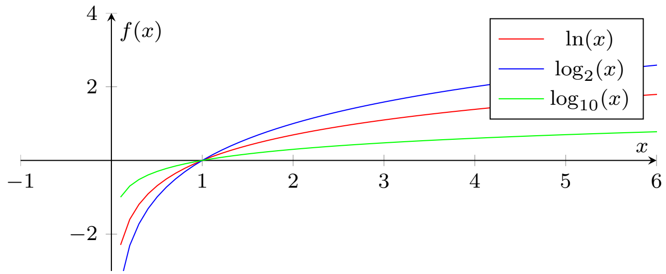
$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$	

10.3 Graphen









Hie nomal fürd Livia:

$$\begin{aligned}
&(m-5n)^2+(5n-m)(3m-n)\\
&=(m-5n)^2-(m-5n)(3m-n)\\
&=(m-5n)\Big((m-5n)-(3m-n)\Big)\\
&=(m-5n)(m-5n-3m+n)\\
&=(m-5n)(-2m-4n)\\
&=-2(m-5n)(m+2n)
\end{aligned}$$